

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije  
Zavod za matematiku

Kolegij: Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu

## LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

IVANA ŠOLJIĆ  
3487

Zagreb, rujan 2004.

# Sadržaj

1. Uvod
2. Laplaceova transformacija i inverzna Laplaceova transformacija
3. Svojstva Laplaceovih transformacija
4. Parcijalni razlomci
5. Primjena Laplaceovih transformacija
6. Osvrt na z-transformaciju
7. Literatura
8. Prilozi
  - 8.1. Prilog 1. Tablica Laplaceovih transformacija
  - 8.2. Prilog 2. Tablica z-transformacija

# 1. Uvod

Laplaceova transformacija je metoda rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi. Metoda se sastoji od tri koraka. U prvom koraku diferencijalna jednadžba se transformira u algebarsku jednadžbu. Tako dobivena jednadžba se riješi, a u trećem koraku se rješenje transformira u traženo rješenje originalne diferencijalne jednadžbe.

U tehničkoj literaturi, posebice u radovima o vođenju procesa, dinamici procesa i sl. općenito je prihvaćena i uobičajena primjena Laplaceove transformacije. Pomoću te se transformacije računski postupci svode na algebarske, mogu se prikladno svrstati, upotreba transformacijskih tablica skraćuje rad, granični i početni uvjeti se uključuju sami po sebi, dobivaju se istodobno rješenja za prijelazna i stacionarna stanja, a lako se rješavaju i slučajevi s diskontinuiranim ulazima.

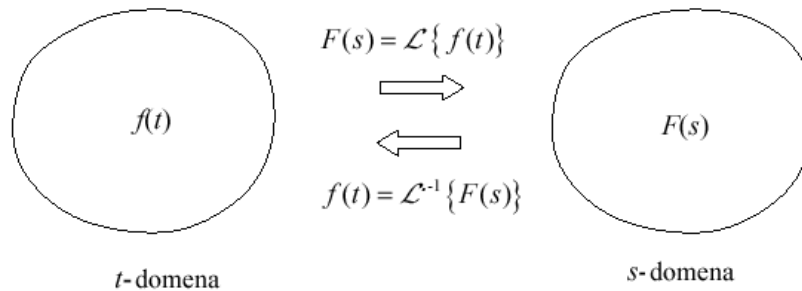
Klasičan pristup rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima uključuje tri koraka: određivanje općeg rješenja, određivanje posebnog rješenja, određivanje konstanta integracije iz početnih uvjeta. Što je red jednadžbe viši to takav postupak rješavanja postaje teži. Naprotiv uz pomoć Laplaceove transformacije preslikavaju se veličine koje su funkcije vremena  $t$ , u nove veličine koje su funkcije kompleksne varijable  $s = \sigma + i\omega$  i na taj način stvarnoj funkciji  $f(t)$  pridružuje odgovarajuća funkcija  $F(s)$  kao njena slika. Zadatak se iz realnog područja prenosi u matematički izvedeno Laplaceovo područje u kojem pojedine računске operacije iz realnog područja poprimaju jednostavni oblik, pa zadatak postaje prikladniji za istraživanje i lakše se dolazi do njegovog rješenja.

Laplaceova transformacija vrijedi samo za kontinuirane funkcije, točnije za po dijelovima neprekinute funkcije. Kod diskretnih zapisa imamo z- transformaciju. Njezina važnost se javlja pri analizi diskretnih sustava, koji su uz današnju primjenu računala vrlo česti.

*PIERE SIMON DE LAPLACE (1749-1827), veliki francuski matematičar i fizičar, jedan od utemeljitelja metričkog sustava, bavio se teorijom potencijala i matematičkom statistikom. Dokazao stabilnost sunčevog sustava.*

## 2. Laplaceova transformacija i inverzna Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija je integralna transformacija koja je tijesno povezana s Fourierovom i ima analogna svojstva. Pomoću Laplaceove transformacije veličine koje su funkcije vremena  $t$  preslikavaju se u nove veličine koje su funkcije kompleksne varijable,  $s = \sigma + i\omega$  i na taj se način stvarnoj funkciji  $f(t)$  pridružuje odgovarajuća funkcija  $F(s)$  kao njena slika. Zadatak se iz realnog područja ( $t$ -domena) prenosi u matematički izvedeno Laplaceovo područje ( $s$ -domena) ( slika 1.).



Slika 1. Laplaceova transformacija

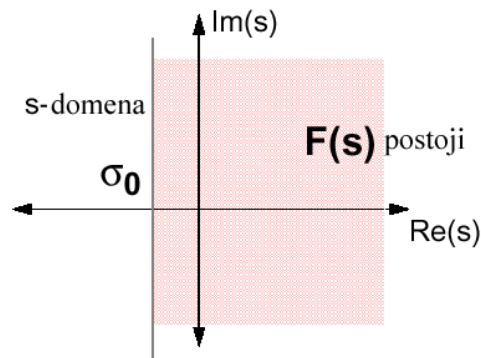
Za funkciju  $f(t)$  realne varijable  $t$  kažemo da je *original* (dakle pripada području definicije Laplaceove transformacije), ako je ona definirana za  $t \geq 0$ , integrabilna na intervalu  $(0, \infty)$ , i ako je

$$|f(t)| \leq Ke^{\sigma_0 t}, \quad \sigma_0 \text{ i } K = \text{const.} \quad (1)$$

Ako je  $s$  kompleksna varijabla, tj.  $s = \sigma + i\omega$ , onda funkciju

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2)$$

nazivamo slikom (transformatom) funkcije  $f(t)$  i pišemo  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ . Integral (2) apsolutno konvergira za  $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ , odnosno  $\sigma > \sigma_0$ , pri čemu je  $\sigma_0$  konstanta iz (1). Odavde slijedi da je slika  $F(s)$  definirana u poluravnini  $\sigma > \sigma_0$ . Transform  $F(s)$  je u toj poluravnini analitička funkcija od  $s$ , i ona teži prema nuli za  $\sigma \rightarrow \infty$  i ostaje omeđena u bilo kojoj poluravnini  $\sigma > \sigma_0$ . Dalje će se uzimati da je  $s$  realna varijabla.



Slika 2. s- domena i područje konvergencije

*Primjer 1.* Nađimo područje konvergencije Laplaceove transformacije ako je:

a)  $f(t) = 1$  za  $t > 0$

$$F(s) = \alpha[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Laplaceova transformacija  $F(s)$  postoji za sve  $s > 0$ .

b)  $f(t) = e^{-at}$  za  $t > 0$  i  $a$  je realni broj

$$F(s) = \alpha[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

Laplaceova transformacija  $F(s)$  postoji za sve  $s > -a$ .

Integrali su izračunati za različite realne funkcije, i sastavljene su tablice transformacijskih parova (Prilog 1). Ista tablica služi za preslikavanje iz realnog područja u Laplaceovo područje i obrnuto. Za razliku od  $F(s) = \alpha[f(t)]$ , kao izravne transformacije, inverzna se transformacija označava s  $f(t) = \alpha^{-1} [F(s)]$ :

$$f(t) = \alpha^{-1} [F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (3)$$

gdje je  $c$  tako izabran da integral (3) konvergira.

### 3. Svojstva Laplaceovih transformata

Funkcija  $f(t)$  se može transformirati ako zadovoljava slijedeće uvjete:

- a) definirana je i jednoznačna za  $t > 0$
- b) po odsječcima je kontinuirana unutar svakog konačnog intervala  $0 < a < t < b$
- c) njen Laplaceov intergral mora biti konvergentan

Sljedeći teoremi čine osnovu za široku primjenu Laplaceove transformacije. Nazivi teorema odgovaraju operacijama s funkcijama-orginalima, osim kod teorema početne i konačne vrijednosti.

#### 1. Teorem

Ako je  $k$  konstanta ili veličina nezavisna od  $t$  i  $s$ , i ako se funkcija  $f(t)$  može transformirati, tada vrijedi

$$\alpha\{ k f(t) \} = k \alpha\{ f(t) \} = k F(s)$$

#### 2. Teorem o linearnosti.

Laplaceova transformacija je linearna operacija, dakle za bilo koje funkcije  $f(t)$  i  $g(t)$  za koje Laplaceova transformacija postoji i bilo koju konstantu  $a$  i  $b$  imamo:

$$\alpha\{ af(t) + bg(t) \} = a \alpha(f) + b \alpha(g)$$

**Dokaz.** Prema definiciji,

$$\begin{aligned}\alpha\{af(t)+bg(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} [af(t)+bg(t)] dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = a\alpha(f)+b\alpha(g).\end{aligned}$$

*Primjer 2.*

Ako je  $f(t) = \cosh at = \frac{(e^{at} + e^{-at})}{2}$ . Koristeći teorem 2. i rezultat iz primjera 1.a dobivamo:

$$\alpha(\cosh at) = \frac{1}{2}\alpha(e^{at}) + \frac{1}{2}\alpha(e^{-at}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$

Kad je  $s > a$ , tada je:  $\alpha(\cos at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$

### 3. Teorem o pomaku.

Ako je  $\alpha[f(t)] = F(s)$  kada je  $s > s_0$ , tada je

$$\alpha[e^{s_0 t} f(t)] = F(s - a) \quad (s > s_0 + a);$$

Dakle, množenje s  $e^{at}$  u realnom području ekvivalentno je pomaku u Laplaceovom području.

**Dokaz.** Prema definiciji,

$$\begin{aligned}F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ F(s-a) &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [e^{at} f(t)] dt = \alpha[e^{at} f(t)].\end{aligned}$$

*Primjer 3.*

Dokažimo da je  $\alpha[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$ .

$$\alpha[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

a prema teoremu o pomaku,

$$\alpha[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}.$$

#### 4. Teorem o diferenciranju.

Ako je Laplaceov transformat od  $f(t)$  jednak  $F(s)$  i ako se prva derivacija od  $f(t)$  po vremenu  $\frac{d}{dt} f(t)$ , možemo transformirati, tada je

$$\alpha \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0)$$

**Dokaz.** Promatramo slučaj kada je  $\frac{d}{dt} f(t)$  kontinuirana za sve  $t \geq 0$ . Tada, prema definiciji i pomoću parcijalnog integriranja,

$$\alpha \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] dt = \left[ e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + s \alpha [f(t)]$$

Član  $f(0)$  je granična vrijednost funkcije  $f(t)$  kad se vrijednosti  $t = 0$  približavamo s desne strane.

Transformacija druge derivacije je:

$$\alpha \left[ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

Transformacija n-te derivacije je:

$$\alpha \left[ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Vidimo da se kod diferencijalnih jednačija početni uvjeti  $f(0), f'(0) \dots f^{(n-1)}(0)$  uključuju automatski, dok se kod klasičnih metoda rješavanja oni uvode odvojeno u rješenje.

*Primjer 4.*

Ako je  $f(t) = \frac{t^2}{2}$  treba naći  $\alpha(f)$ . Pošto je  $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(t) = 1$ .

Kako je  $\alpha(f'') = \alpha(1) = \frac{1}{s} = s^2 \alpha(f)$  ili  $\alpha\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{s^3}$ .

#### 5. Teorem o integriranju.

Ako je Laplaceov transformat od  $f(t)$  jednak  $F(s)$ , tada je transformat integrala  $f(t)$ :

$$\alpha \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{f^{-1}(0)}{s} \quad (s > 0, s > s_0).$$

Član  $f^{-1}(0)$  je konstanta integracije. Jednaka je vrijednosti integrala kad se vrijednosti  $t = 0$  približavamo s desne strane.

Transformacija dvostrukog integrala je

$$\alpha\left\{\int\int f(t)dt dt\right\} = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{-1}(0)}{s^2} + \frac{f^{-2}(0)}{s}$$

a transformacija integrala n-tog reda

$$\alpha\left\{\int\int\int f(t)dt\dots dt\right\} = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{f^{-1}(0)}{s^n} + \frac{f^{-2}(0)}{s^n} + \dots + \frac{f^{-n}(0)}{s}$$

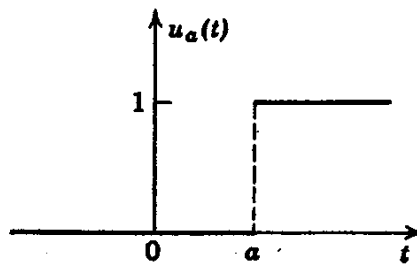
## 6. Teorem o retardaciji.

Ako je Laplaceov transformat od  $f(t)$  jednak  $F(s)$ , tada za vremenski pomak funkcije  $f(t)$  za vrijednost  $a$  (pozitivan realni broj) daje transformat:

$$\alpha[f(t-a)u_a(t)] = e^{-as} F(s)$$

gdje je  $u_a(t)$  Heavisideova funkcija (jedinična skokomična funkcija):

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < a \\ 1 & \text{za } t > a \end{cases} \quad (a \geq 0)$$



**Dokaz.**

$$F(s) = \alpha[f(\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau$$

$$e^{-as} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau$$

supstitucija:  $\tau + a = t$

$$e^{-as} F(s) = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt$$

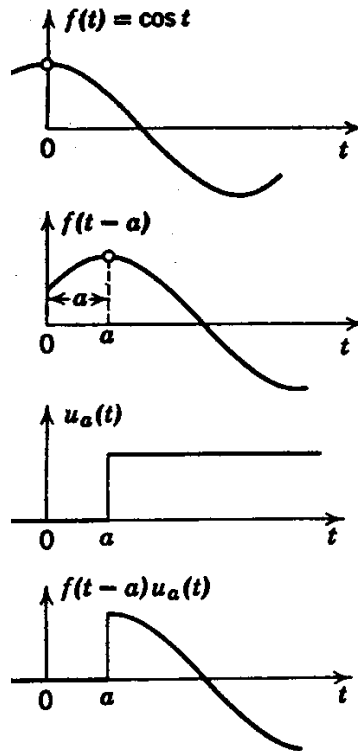
Želimo da granice integracije budu od 0 do  $\infty$ . Radi toga funkciju  $f(t-a)$  zamjenimo s funkcijom koja je jednaka nuli na intervalu  $0 \leq t < a$  i jednaka je  $f(t-a)$  za  $t > a$ :

$$f(t-a)u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } t < a \\ f(t-a) & \text{za } t > a \end{cases}$$

$$e^{-as} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)u_a(t) dt = \alpha[f(t-a)u_a(t)].$$



Primjer 3.



Slika 4. Ilustracijski primjer  $f(t-a)u_a(t)$  gdje je  $f(t)=\cos t$

**7. Teorem početne vrijednosti.**

Ako se  $f(t)$  i  $\frac{d}{dt} f(t)$  mogu transformirati i ako je transformat od  $f(t)$  jednak  $F(s)$ , a  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  postoji kad  $t \rightarrow \infty$ , tada je:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Dakle vladanje  $f(t)$  u blizini  $t = \infty$  odgovara vladanju  $sF(s)$  u blizini  $s = 0$ . Ako  $sF(s)$  ima Vrijednosti od  $s$  za koje postaje beskonačan, tada nema niti jedne konačne vrijednosti od  $f(t)$  i teorem ne vrijedi.

**8. Teorem konačne vrijednosti.**

Ako se  $f(t)$  i  $\frac{d}{dt} f(t)$  mogu transformirati i ako je transformat od  $f(t)$  jednak  $F(s)$ , a postoji  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ , tada je :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

Dakle vladanje  $f(t)$  u blizini  $t = 0$  odgovara vladanju  $sF(s)$  u blizini  $s = \infty$ .

Pomoću teorema početne vrijednosti i konačne vrijednosti možemo naći vrijednosti funkcije u realnom području  $f(t)$  kod dva ekstrema,  $t = 0$  i  $t = \infty$ , i to bez korištenja inverzne transformacije.

## 4. Parcijalni razlomci

Za primjene je osobito važna inverzna transformacija razlomljene racionalne funkcije  $s$  obzirom na  $s$ . Takve funkcije rastavljamo na parcijalne razlomke i onda se prema teoremu o linearnosti možemo ograničiti na inverzne transformacije parcijalnih razlomaka. Rješenje je tada zbroj svih pojedinih razlomaka preslikanih u realno područje.

Općenito se transformat  $F(s)$  može prikazati kao omjer dvaju polinoma  $G(s)$  i  $H(s)$ , koji su redova  $m$  i  $n$ , i koji se mogu prikazati padajućim redom potencija varijable  $s$ :

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

$a_m$  i  $b_n$  su realne konstante, a koeficijent najviše potencije od  $s$  u nazivniku može se izjednačiti s jedinicom. Uz to pretpostavljamo da je  $n > m$  i da je stoga  $F(s)$  pravi razlomak.

Jedan od načina da se nađu parcijalni razlomci funkcije  $F(s)$  je pomoću algebarske metode tzv. Heavisideovog razvoja. Kao konačni oblik dobijemo:

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{\alpha_1}{s + \beta_1} + \frac{\alpha_2}{s + \beta_2} + \frac{\alpha_3}{s + \beta_3} + \dots + \frac{\alpha_i}{s + \beta_i} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + \beta_n}$$

gdje je  $H(s)$  reda  $n$ , a  $\beta_i$  su suprotne vrijednosti korijena jednadžbe  $H(s) = 0$ . Koeficijenti  $\alpha_i$  se dobiju pomoću sljedećeg generaliziranog izraza:

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow -\beta_i} \left( (s + \beta_i) \frac{G(s)}{H(s)} \right)$$

no, imamo li poseban slučaj da se korijeni  $\beta$  jednadžbe  $H(s) = 0$  ponavljaju:

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{\alpha_m}{(s + \beta)^m} + \frac{\alpha_{m-1}}{(s + \beta)^{m-1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{s + \beta} + \dots + \frac{\alpha_i}{(s + \beta_i)}$$

korijeni  $\alpha_i$  se dobiju na sljedeći način:

$$\frac{(s + \beta)^m G(s)}{H(s)} = \alpha_m + \alpha_{m-1} (s + \beta) + \dots + \alpha_1 (s + \beta)^{k-1}$$

$$\alpha_m = \lim_{s \rightarrow -\beta} \left( \frac{(s + \beta)^m G(s)}{H(s)} \right)$$

$$\alpha_k = \lim_{s \rightarrow -\beta} \left( \frac{1}{(m-k)!} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \frac{(s + \beta)^m G(s)}{H(s)} \right) \quad (k=1, 2, \dots, m-1)$$

Koeficijente  $\alpha_i$  možemo dobiti i metodom neodređenih koeficijenata.

Dobivene parcijalne razlomke možemo primjenom tablice sada lako prevesti u realno područje:

$$f(t) = \mathcal{A}^{-1}[F(s)] = \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{(s+\beta_1)}\right] + \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{(s+\beta_2)}\right] + \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{\alpha_3}{(s+\beta_3)}\right] + \dots + \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{\alpha_i}{(s+\beta_i)}\right] + \dots + \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{\alpha_n}{(s+\beta_n)}\right]$$

*Primjer 1.* Pronađi inverznu transformaciju od:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s}$$

Prikažimo  $Y(s)$  u obliku parcijalnih razlomaka:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s+3}$$

Nađimo koeficijente:

$$A = \left. \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} \right|_{s=0} = -\frac{1}{6} \quad B = \left. \frac{s+1}{s(s+3)} \right|_{s=2} = -\frac{3}{10} \quad C = \left. \frac{s+1}{s(s-2)} \right|_{s=-3} = -\frac{2}{15}$$

Imamo:

$$Y(s) = -\frac{1}{6s} + \frac{3}{10(s-2)} - \frac{2}{15(s+3)}$$

Inverzna transformacija:

$$\mathcal{A}^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10} e^{2t} - \frac{2}{10} e^{-3t}$$

## 5. Primjena Laplaceovih transformacija

*Primjer 1.* Diferencijalna jednačina koja opisuje linearni proces prvog reda ima oblik:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y = kx(t)$$

Radi ispitivanja dinamičkog vladanja procesa uvodi se jedinična skokovična pobuda ( $x(t)$  je Heavisideova funkcija). Nađimo prijelaznu pojavu tog procesa ( $y(t)$ ) uz nulte početne uvjete  $y(0) = x(0) = 0$ .

Prevođenje u Laplaceovo područje:

$$\tau[sY(s) - y(0)] + y(s) = kX(s)$$

$$Y(s)[\tau s + 1] = kX(s)$$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} X(s)$$

u Laplaceovom području  $X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \frac{1}{s} = \frac{k}{\tau(s + \frac{1}{\tau})s} = \frac{\frac{k}{\tau}}{(s + \frac{1}{\tau})s}$$

$$K = \frac{k}{\tau}$$

$$Y(s) = \frac{K}{(s + \frac{1}{\tau})s} = \frac{A}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{B}{s}$$

$$K = As + B(s + \frac{1}{\tau})$$

$$s = -\frac{1}{\tau}: \quad K = A(-\frac{1}{\tau}) + B\left[(-\frac{1}{\tau}) + \frac{1}{\tau}\right] = A(-\frac{1}{\tau}) \rightarrow A = -k$$

$$s = 0: \quad K = A \cdot 0 + B(0 + \frac{1}{\tau}) = B \frac{1}{\tau} \rightarrow B = k$$

$$Y(s) = -k \left( \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) + k \left( \frac{1}{s} \right)$$

Nakon rješenja jednadžbe u Laplaceovom području vraćamo se u realno područje:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + k \cdot 1$$

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

*Primjer 2.* Nađimo partikularno rješenje linearne diferencijalne jednadžbe:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Prevođenje te jednadžbe u Laplaceovo područje:

$$s^2 Y(s) - s + 1 - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s-3}$$

Riješimo to po  $Y(s)$  i prikažimo  $Y(s)$  u obliku parcijalnih razlomaka:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{s^4 - 7s^3 + 13s^2 + 4s - 12}{s^2(s-3)(s^2 - 3s + 2)} \\ &= \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-1} \end{aligned}$$

Nađemo koeficijente:

$$\begin{aligned} A_2 &= \left. \frac{G(s)}{(s-3)(s^2 - 3s + 2)} \right|_{s=0} = \frac{12}{6} = 2 \\ A_1 &= \left. \frac{d}{ds} \frac{G(s)}{H(s)} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \left[ \frac{s^4 - 7s^3 + 13s^2 + 4s - 12}{(s-3)(s^2 - 3s + 2)} \right] \right|_{s=0} = -2 \\ B &= \left. \frac{G(s)}{s^2(s^2 - 3s + 2)} \right|_{s=3} = \frac{1}{2} \\ C &= \left. \frac{G(s)}{s^2(s-3)(s-2)} \right|_{s=2} = -2 \\ D &= \left. \frac{G(s)}{s^2(s-3)(s-2)} \right|_{s=1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Imamo:

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{2(s-3)} - \frac{2}{s-2} - \frac{1}{2(s-1)}$$

Nakon rješenja jednadžbe u Laplaceovom području vraćamo se u realno područje:

$$y(t) = \mathcal{A}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{A}^{-1} \left[ \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{2(s-3)} - \frac{2}{s-2} - \frac{1}{2(s-1)} \right]$$

$$y(t) = 2t - 2 + \frac{1}{2}e^{3t} - 2e^{2t} - \frac{1}{2}e^t$$

## 6. Osvrt na z-transformaciju

U diskretnim sustavim, umjesto funkcija, javljaju se nizovi. Danas, uz sve veću primjenu računala na važnosti dobivaju vremenski diskretni zapisi. Matematičke tehnike za analizu takvih diskretnih sustava su jednadžbe diferencija i z-transformacija.

Pretpostavimo da uzorkujemo kontinuiranu varijablu koja je funkcija vremena  $f(t)$ . Budući da uzorkovane vrijednosti kontinuirane funkcije  $f(t)$  postoje samo u trenutku

uzorkovanja, niz brojeva koji odgovaraju vrijednosti funkcije u vremenu uzorkovanja možemo zapisati kao:

$$f(mT_s) = \begin{cases} f(t) & \text{za } m=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

gdje je  $T_s$  interval uzorkovanja.

Vremenski diskretni zapis kontinuirane funkcije  $f(t)$  označiti ćemo s  $f^*(t)$ . Budući da je vremenski diskretni zapis  $f^*(t)$  podskup od kontinuirane funkcije  $f(t)$ , možemo primjeniti Laplaceovu transformaciju na  $f^*(t)$ :

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} f^*(t) e^{-st} dt$$

Budući  $f^*(t)$  postoji samo u trenutku uzorkovanja integral možemo zamijeniti sa sumom:

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} f^*(t) e^{-st} dt = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) e^{-smT_s}$$

Uvodeći supstituciju  $z = e^{sT_s}$  imamo:

$$F^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) e^{-smT_s} = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) z^{-m} = F(z)$$

Dakle, z- transformacija kontinuirane funkcije  $f(t)$  uzorkovane s intervalom uzorkovanja  $T_s$  je definirana sljedećim izrazom:

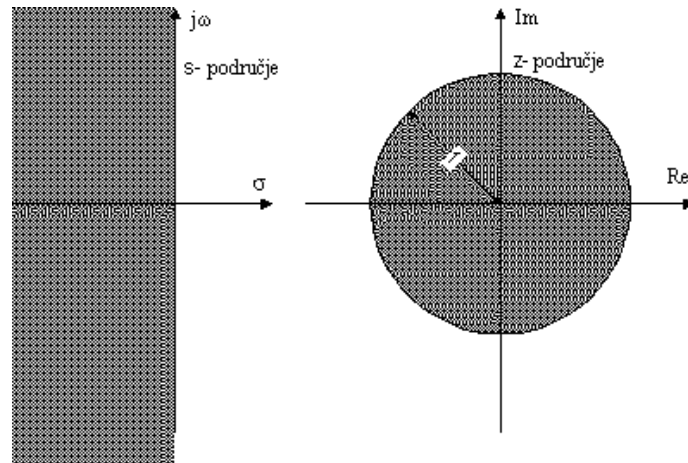
$$Z[f^*(t)] = F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) z^{-m}$$

Kako je z-transformacija zapravo samo Laplaceova transformacija vremenskog diskretnog zapisa, kao takva nasljeđuje mnoga svojstva Laplaceove transformacije koja su navedena gore. Tablica z- transformacija se nalazi u prilogu (Prilog 2.).

Preslikavanje s-područja u z-područje ostvareno je sljedećim izrazom:

$$z = e^{sT_s}$$

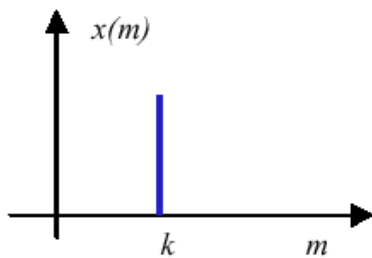
koji mapira cijelu lijevu stranu s- područja u ravninu omeđenu jediničnom kružnicom, tzv. z- područje (Slika 5.).



Slika 5. s- područje i z- područje

Kako je z- transformacija beskonačni red potencija, ona postoji samo za one vrijednosti varijable  $z$  za koje red konvergira konačnoj sumi. Područje konvergencije z- transformacije je skup svih vrijednosti  $z$  za koje  $F(z)$  postiže konačne vrijednosti.

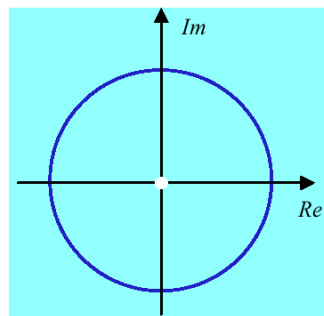
*Primjer 1.* Odredimo z- transformaciju i njezino područje konvergencije sljedećeg signala ( $F_s=1$ ):



$$x(m) = \delta(m - k) = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(m - k) z^{-m} = 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{z^k}$$

$X(z)$  postoji za sve vrijednosti  $z$  osim  $z=0$ . Područje konvergencije je cijelo z-područje osim  $z=0$  (Slika 6.).



Slika 6. Područje konvergencije z-transformacije *primjera 1.*

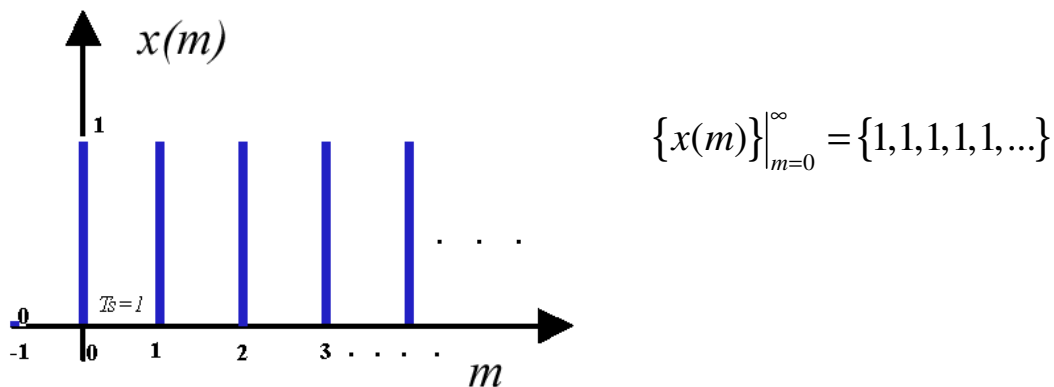
Primjer 2. Odredimo z-transformaciju niza:

$$\{f(m)\} = \{1, 3, 2, 0, 4, 0, 0, 0\}$$

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)z^{-m}$$

$$F(z) = 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-4}$$

Primjer 3. Odredimo z-transformaciju Heavisideove funkcije uzorkovane pri  $T_s=l$ :



$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-m} + \dots$$

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m}$$

kako je:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}, \quad |a| < 1$$

imnamo:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Primjer 4. Diskretni sustav je određen slijedećom jednažbom diferencija:

$$x(m+2) - \frac{3}{2} \cdot x(m+1) + \frac{1}{2} \cdot x(m) = u(m)$$

s početnim uvjetima  $x(0)=0$ ,  $x(1)=\frac{5}{2}$ . Nađimo odziv sustava na Heavisideovu funkciju,  $u(m)$  kao pobudu.



Prijelaz u z-područje:

$$\left[ z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) \right] - \frac{3}{2} \cdot [zX(z) - zx(0)] + \frac{1}{2} \cdot X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Riješimo po X(z):

$$\left[ z^2 - \frac{3}{2} \cdot z + \frac{1}{2} \right] X(z) = \frac{z}{z-1} + z^2 + \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \right) z$$

$$X(z) = \frac{z[1 + (z+1)(z-1)]}{(z-1)(z-1) - (z - \frac{1}{2})} = \frac{z^3}{(z-1)^2(z - \frac{1}{2})}$$

Nađimo parcijalne razlomke od  $\frac{X(z)}{z}$ :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1)^2(z - \frac{1}{2})} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z - \frac{1}{2}}$$

$$A = \left. \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}} \right|_{z=1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$C = \left. \frac{z^2}{(z-1)^2} \right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = 1$$

$$z^2 = A\left(z - \frac{1}{2}\right) + B\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1) + C(z-1)^2$$

$$z^2 : 1 = B + C = B + 1 \rightarrow B = 0$$

$$X(z) = \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

Inverzna z-transformacija (tablica z-transformacija):

$$x(m) = 2m + \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

## 7. Literatura

1. Ervin Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics second edition, John Wiley & Sons, Inc. New York-London-Sydney 1967
2. I. N. Bronštejn i K.A. Semendjajev: Matematički priručnik za inženjere i studente, Tehnička knjiga, Zagreb 1991.
3. J. Božićević: Automatsko vođenje procesa, Tehnička knjiga, Zagreb 1971.
4. <http://lorien.ncl.ac.uk/ming/digicont/digimath/sampled3.htm>  
(Chemical and Process Engineering, University of Newcastle Upon Tyne)
5. <http://fly.srk.fer.hr/~mordor/mat3.pdf>

## 8. Prilozi

### 8.1. Prilog 1.: Tablica Laplaceovih transformacija

	$f(t)$	$F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	$c$	$\frac{c}{s}$
3.	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4.	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
6.	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
7.	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
9.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
10.	$\frac{t}{2a} \cdot \sin at$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
11.	$t \cdot \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
12.	$e^{-at} \cdot \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
13.	$e^{-at} \cdot \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
14.	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s+a)$
15.	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
16.	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

Prilog 2.: Tablica z- transformacija

$f(n)$	$F(z)$
$a^n$	$\frac{z}{z-a}$
$\frac{a^n}{n!}$	$e^{az}$
$a^n \sin \beta n$	$\frac{az \sin \beta}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2}$
$a^n \cos \beta n$	$\frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2}$
$na^n$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} a^n$	$\frac{az^2}{(z-a)^3}$
$\frac{n!}{2!(n-2)!} a^n$	$\frac{a^2 z}{(z-a)^3}$
$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} a^n$	$\frac{az^k}{(z-a)^{k+1}}$
$\frac{n!}{k!(n-k)!} a^n$	$\frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$
$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
$\sum_{k=0}^n f(k)$	$\frac{z}{z-1} F(z)$
$f(n-k)$	$\frac{F(z)}{z^k}$
$f(n+k)$	$z^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f(i) z^{k-i}$
$nf(n)$	$-zF'(z)$
$a^{-n} f(n)$	$F(az)$
$f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)$	$F(z) \cdot G(z)$